15 / 12 / 2017

المحاضرة الثالثة

تعريف :

نسمي الصف المعرفي $p \geq 1$ عندئذ نرمز له $L^p(E)$ مجموعة كل الدوال القابلة للقياس على E والمحققة للشرط الآتي :

$$\int_E |f|^p \, d\lambda < \infty$$

تمرين (1) :

احسب قياس المجموعة الآتية :

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{2^{2n}} , 1 - \frac{1}{2^{2n+1}}\right]$$

الحل : نفرض أن :

$$E_n = \left[1 - \frac{1}{2^{n}} , 1 - \frac{1}{2^{2n+1}}\right]$$

نلاحظ أن المجموعات E_n مجموعات مقيسة حسب ليبيغ كونها مجموعات بوريلية وذلك لكل عدد n

ونلاحظ أن هذه المجموعات منفصلة مثنى مثنى وذلك لأنه $i < j$ فيكون :

$$2^{2i+1} < 2^{2j}$$

$$\frac{1}{2^{2i+1}} > \frac{1}{2^{2j}} \Rightarrow -\frac{1}{2^{2i+1}} < -\frac{1}{2^{2j}} \Rightarrow$$

$$1 - \frac{1}{2^{2i+1}} < 1 - \frac{1}{2^{2j}}$$

/ /

$\forall i, j = 0, 1, \ldots$ $E_i \cap E_j = \phi$: لأن

فالمجموعات منفصلة مثنى مثنى

- فالمجموعات تشكل تجزئة للمجموعة E اذا:

E تكون مقيسة حسب لبيغ وتحسب على هيئة مجموعات عددة بالنسبة ل لبيغ

$$\lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{n=0} E_n\right) = \sum_{n=0} \lambda(E_n) = \frac{1}{2} \sum_{n=0} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

توضيح

$$1 - \frac{1}{2^{2n+1}} - 1 + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

تمرين (2):

لتكن $(f_n(x))$ متتالية من الدوال المعرفة على المجالات:

$$[-1, 1] ; [1, b] ; b > 1$$

بالشكل:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$$

- والدالة

$$g(x) = x^2$$

معرفة على نفس المجالات:

الحل :

بين هل تصح المساواة الآتية

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

الحل :

1- أولاً لنجد المجال [-1,1] لمتتالية الدوال (f_n) تتقارب من الدالة الصفرية أي

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x) \qquad \forall x\in[-1,1]$$

أي أن حدود المتتالية المعطاة تمثل دوال مستمرة على [-1,1]

وبالتالي $f(x)$ دالة ثابتة فتكون مستمرة

لكن هذه المتتالية لا تتقارب بانتظام من الدالة الصفرية

وذلك لأن هذه المتتالية لا تتقارب بانتظام من الدالة

الصفرية حيث تعطي نقطة x_n تنتمي لـ [0,1] حيث :

$$\exists\, x_n = \frac{1}{n} \in [0,1] : |f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sigma_n \neq 0$$

إذاً المتتالية المعطاة لا تتقارب بانتظام إلى الدالة الصفرية على المجال [0,1] وبالتالي لا يمكن أن تتقارب بانتظام على كامل المجال [-1,1]

وبصورة ثانية لدينا $f_n(x)$

[-1,0] متناقصة و [0,1] متزايدة. في مضطردة أي محدودة التغير، كما أن التكاملات الآتية موجودة

$$\int_{-1}^{1} f_n(x)\, dg(x) \quad , \quad \int_{-1}^{1} 0 \cdot dg(x) = 0$$

لكن المساواة قد لا تكون محققة

2) لنأخذ المجال [a,b] ، a < b

إن متتالية الدوال المعطاة في هذه الحالة تكون متقاربة بانتظام من الدالة الصفرية وذلك لأن

Alamal

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0 \Rightarrow f_n \rightrightarrows 0$$

على $[1,b]$

الدالة $g(x)=x^2$ دالة مطردة متزايدة على $[1,b]$

إذاً محدودة بالتغير وبأن التكاملات موجودة من جهة

والمساواة محققة من جهة ثانية

إذاً

$$(1) \int_1^b f_n(x)\, dg(x)$$

موجود

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^b f_n(x)\, dg(x) = 0 = \int_1^b f(x)\, dg(x)$$

$$\int_1^b \frac{nx}{1+n^2x^2}(2x)\, dx = \frac{1}{n}\int_1^b \frac{2n^2x^2}{1+n^2x^2}\, dx$$

نضيف 2 ونطرح 2

$$= \frac{1}{n}\int_1^b \frac{2n^2x^2+2-2}{1+n^2x^2}\, dx = \frac{1}{n}\int_1^b 2 - \frac{2}{1+n^2x^2}$$

تمرين (3):

لتكن متتالية من الدوال المعرفة على المجال
$(g_n(x))$ المعرفة على $[0,1]$ بالصورة:

$$g_n(x) = x^n$$

$$f(x) = \arcsin x$$

هل تصح المساواة التالية:

$$\lim_{n \to \infty} \int f(x)\, dg_n(x) \overset{?}{=} \int f(x)\, dg(x)$$

الحل:

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x) = \begin{cases} 1 & ; x=1 \\ 0 & ; 0 \le x < 1 \end{cases}$$

لاحظنا أن متتالية الدوال المعطاة متقاربة نقطياً من الدالة $g(x)$ وهذه الدالة $g(x)$ غير مستمرة عند النقطة $x=1$

$$\lim_{x \to 1} g(x) = 0 \neq g(1)$$

• هذه الدالة مستمرة تقريباً في كل مكان على المجال $[0,1]$ لأن:

$$E_0 = \{x \in E = [0,1] ;\ \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)\} = \{1\}$$

$$\Rightarrow \lambda(\{1\}) = 0$$

نلاحظ بأن هذه المتتالية الدوال المعطاة هي دوال
متزايدة من أجل كل عدد طبيعي n على المجال [0,1] فهي
محدودة التغير

$$V(g_n) = |g_n(1) - g_n(0)| = |1 - 0| = |1| , \forall n=1,2,\dots$$

إن الدالة $f(x) = \arcsin x$
هذه الدالة مستمرة على المجال [-1,1] وبالتالي مستمرة
على المجال [0,1] وهذا يقتضي بأن:

(1) $\int_0^1 (\arcsin x)\, d(x^n)$ «موجود»

$\int_0^1 (\arcsin x)\, d g_n(x)$ «موجودة»

فإن المساواة تكون صحيحة

• لتعريف المقاس العد
نأخذ الدالة $\mu : P(A) \to [0,+\infty]$ بالشكل

$$\mu(A) = \begin{cases} +\infty & \text{A غير منتهية ;} \\ |A| & \text{إذا كانت منتهية ; |A| عدد عناصر المجموعة A} \end{cases}$$

إن هذا المقاس يبين متى يكون منتهي أو غير منتهي

Alamal

Scanned by CamScanner

المثال

انعدم على المجموعة الخالية =0 أي أنّ:

$\mu(\phi)=0$

٢/ يحقق الخاصية الجمعية التامة أي:

$\forall A_n$ من $P(R)$

منفصلة مثنى مثنى أي

$A_i \cap A_j = \phi$ لكل $i \neq j$

أي:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

هناك حالتان:

١/ إذا كانت إحدى المجموعات A_n من $P(R)$ غير منتهية

$$\mu(A_n)=+\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)=+\infty$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=+\infty \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

٢/ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ غير منتهية وهذا يعني أنه يوجد عدد لانهائي من

المجموعات غير الخالية ولتكن:

$A_{n_1}, A_{n_2}, A_{n_3}, \ldots$

$\mu(A_{n_k}) \geq 1$ حسب الشرطين

$= \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = +\infty = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

فتكون المساواة صحيحة

4) إذا كانت $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ مجموعة منتهية معرفة ؛

$A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_j}$

مجموعة منتهية

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{j} A_n = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_{n_j})$

$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_{n_j}) + 0 + 0 + 0 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

ما نتج في أن μ لبعض قياس على $P(R)$ وهنا
العناصر يعين قياس العد
- إن هنا العناصر من الممكن أن تكون قياسات عدة نستعرض
الحالات الآتية ؛
1) المجموعة X مكونة من العناصر $X = \{a, b, c\}$

Alamal

$\mu(X) = 3 < \infty$

فالمقياس بهذه الحالة عبارة عن مقياس منته

(2) $N = \{1, 2, \dots\}$

هذه المجموعة غير منتهية ولكن كانت المجموعات

$A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}, \dots, A_n = \{n\}, \dots$

هي مجموعات منفصلة مثنى مثنى متشكلة التجزئة لـ N

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = N \Longrightarrow \mu(A_n) = 1 < \infty$$

وهذا يعني أن المقياس بالعد σ منته

وهذا المقياس غير منته ذلك أنه σ منته ولكنه غير منته

لأن $\mu(N) = \infty$

تمرين (5):

احسب تكامل ليبيغ للدالة f المعرفة على المجال $E = [0,1]$ بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & ; x \in [0, \tfrac{1}{2}] \cap U \\ \cos \pi x & ; x \in [\tfrac{1}{2}, 1] \cap U \\ x^2 & ; x \in C \end{cases}$$

حيث C مجموعة كانتور و $U = C^c$

التالي:

اذا وضعنا $E_1 = [0,\frac{1}{2}[\cap \mathbb{Q}^c$, $E_2 = [\frac{1}{2},1] \cap \mathbb{Q}^c$

$E_3 = C$

$$f(x) = (\sin \pi x)\, I_{E_1}(x) + (\cos \pi x)\, I_{E_2}(x) + x^2\, I_{E_3}(x)$$

حيث $\forall x \in E = [0,1]$

$|f(x)| \leq 3 \quad ; \forall x \in [0,1]$

فإن الدالة f مقيدة ومقيسة وقابلة للتكامل حسب لبيغ
ومبرهنة جزئية :

نقسم مجال التكامل الى مجالين جزئيين هما $[\frac{1}{2},1]$, $[0,\frac{1}{2}[$

$f(x) \overset{ae}{=} \sin \pi x \quad ; \forall x \in [0,\frac{1}{2}[$

$f(x) \overset{ae}{=} \cos \pi x \quad ; \forall x \in [\frac{1}{2},1]$

فإن هاتين المجموعتين مقيستين ومقياس كل منهما $\frac{1}{2}$

حسب نظرية سابقة تكون f مقيسة على المجال $[0,\frac{1}{2}[$ لأن الدالة $\sin \pi x$ مستمرة على المجال $[0,\frac{1}{2}]$
وبالتالي مقيسة عليه، وبنفس الطريقة للثانية

وبالتالي فإن $f(x)$ مقيسة على المجال $[0,1]$

فإذاً :

$$(L)\int_E f\,.d\lambda = (L)\int_0^{\frac{1}{2}} \sin\pi x\,.d\lambda + (L)\int_{\frac{1}{2}}^{1} \cos\pi x\,.d\lambda$$

$$= (R)\int_0^{\frac{1}{2}} \sin\pi x\,.dx + (R)\int_{\frac{1}{2}}^{1} \cos\pi x\,.dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[-\cos\pi x\Big]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\pi}\Big[\sin\pi x\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{1}{\pi}(1) + \frac{1}{\pi}(-1) = 0$$

مصطفى طالب